CI3621 – Grafos y Flujo en Redes

Abril-Julio 2014

Examen I (30%)

1.- 7 pts. Determine la veracidad (V, F) de las siguientes expresiones

a) Todo *árbol* se puede colorear con un mínimo de 3 colores **F**

b) Si un grafo simple no dirigido contiene un ciclo C, entonces $|C| \geq 2$ **V**

c) Los grafos G(V, E) y H(W, F) son isomorfos si $|V|=|W| \ \ y \ \ |E|=|F|$ **F**

d) Todo grafo que se pueda pintar con 2 colores es bipartito **V**

e) El grafo completo $\mathbf{K}_n$ es planar para n < 6 **F**

f) El grafo completo bipartito $\mathbf{K}_{n,n}$ es planar para n < 3 **V**

g) En grafos dirigidos, | Componentes Fuertemente Conexas | $\leqslant$ Nº Circuitos de G **V**

h) El subgrafo inducido G(F) con $F \subseteq E$ puede tener lados $\hat{e} \ \ tal\ que \ \ \hat{e} \in E - F$ **F**

i) Un bucle siempre tiene longitud 1 **V**

j) Si G es dirigido y su grafo subyacente no tiene ciclos, el ARM y el AMC son iguales **V**

k) Todo grafo no dirigido conexo con *n* vértices y *n* lados tiene un ciclo **V**

l) Todo vértice extremo de un puente en G conexo pertenece al conjunto de articulación **V**

m) $\forall\, v \in V\, en \ \ G(V, E), \ \ grado(v) \ \ impar, \ \Rightarrow \ G \ \ tiene \ \ un \ \ ciclo \ \ euleriano$ **F**

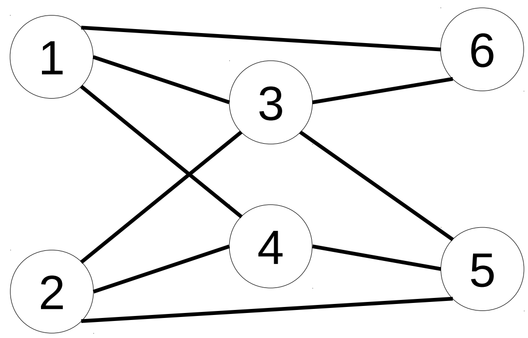
n) Excepto para la raíz, los caminos en un ARM salen de un arco que está en el ARM **V**

2.- 6 pts. (a) Construya el grafo no dirigido que viene dado por la siguiente matriz de adyacencia M.

(b) Construya la lista de adyacencias. (c) Construya la matriz de alcance $\mathbf{M}_k$ para k = 3

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	0	1	1	0	1
2	0	0	1	1	1	0
3	1	1	0	0	1	1
4	1	1	0	0	1	0
5	0	1	1	1	0	0
6	1	0	1	0	0	0

a)



b)

1 --> {1,3}, {1,4}, {1,6}
2 --> {2,3}, {2,4}, {2,5}
3 --> {1,2}, {1,3}, {3,5}, {3,6}
4 --> {1,4}, {2,4}, {2,5}
5 --> {2,5}, {3,5}, {4,5}
6 --> {1,6}, {3,6}

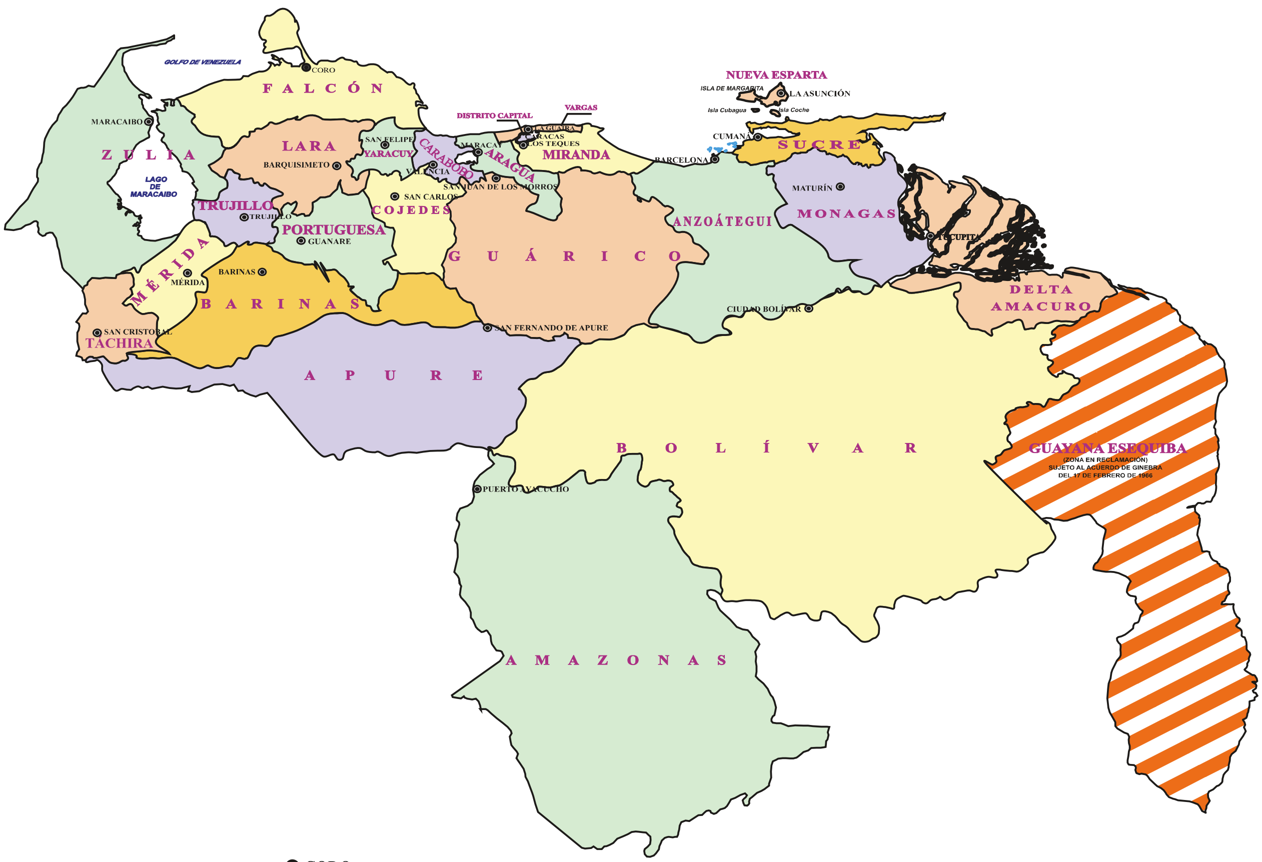
c) La Matriz M es la misma de arriba. La suma es un OR binariio → 0+0 = 1, ?+1 = 1

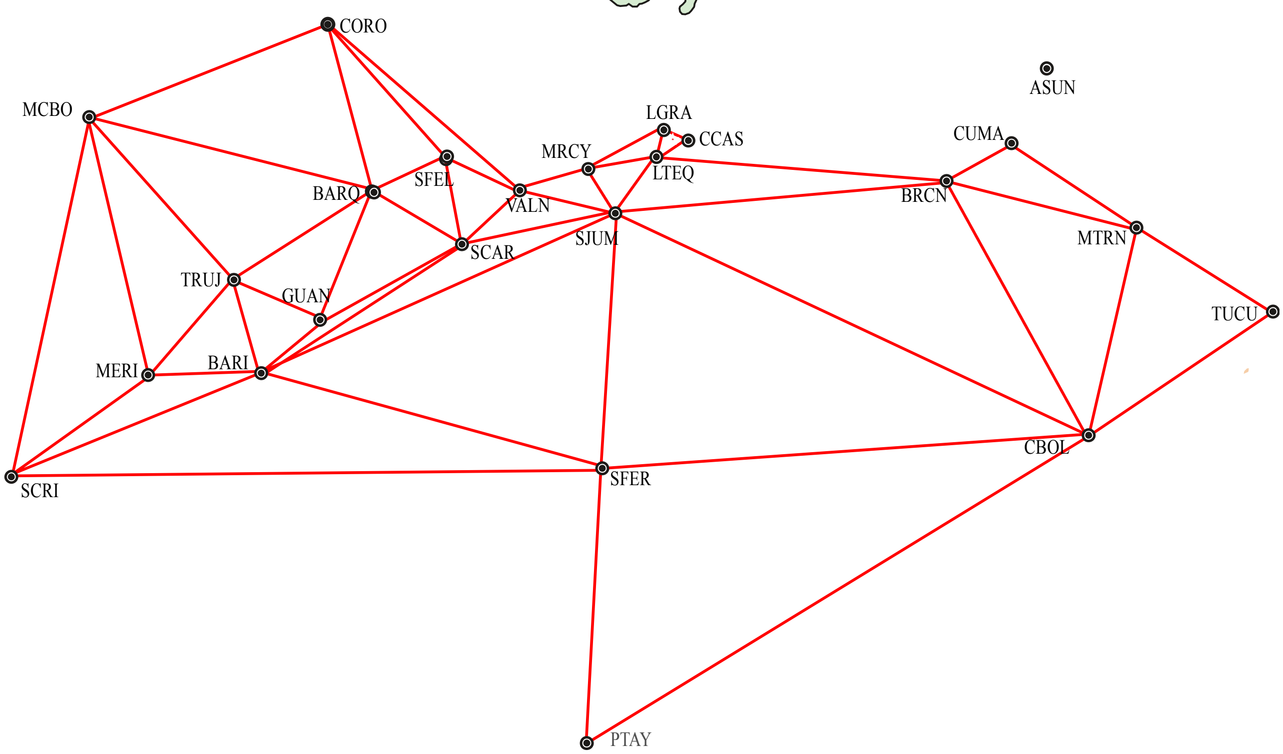
$M_3 = I + M + M^2 + M^3$

Si calculamos M^2 obtenemos una matriz de puros unos con ceros en la diagonal. Sumamos I y entonces es una matriz de puros 1's.

$$M=\begin{bmatrix}0&0&1&1&0&1\\0&0&1&1&1&0\\1&1&0&0&1&1\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\quad M^2=M^3=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&1\\1&0&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&1\\1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&0\end{bmatrix}\quad M_3=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

3.- 5 pts Construya (dibuje) el grafo de las capitales de estado, conectando estados con un lado si tienen frontera en común. Determine (a) El número de caras, (b) Su número cromático, (c) Si es un grafo bipartito (y porqué). *Extra*: ¿Cuantas caras tendrá el grafo DUAL.?





(a) *Número de Caras:*

i.- Contando explícitamente las caras: 29 + externa = **30**

ii.- Calculando:

Número de vértices (grafo conexo sin ASUN)

$|V| = 23$

Número de lados: por cada vértice contamos sus lados.

Cada lado es contado entonces 2 veces, así que al final dividimos entre 2

Num lados = 102 (dividir por 2)

$|E| = 51$

Fórmula Euler para el plano para vértices, caras y lados → $|V| - |E| + |F| = 2$

$|F| = |E| - |V| + 2 \rightarrow |F| = 51 - 23 + 2 = \mathbf{30}$

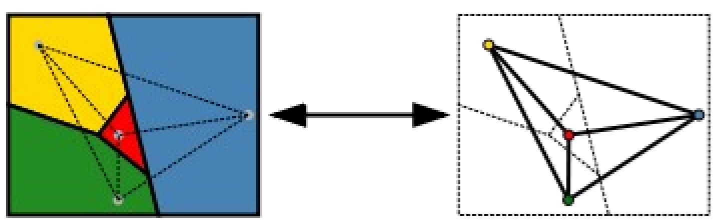
(b) *Número cromático*.

Todo mapa es un grafo planar, así que sabemos que podemos colorear con 4 colores o menos.

Analíticamente sabemos que es planar también porque no existe ningún subgrafo isomorfo a $\mathbf{K_5}$ o $\mathbf{K_{3,3}}$.

Es obvio que como hay triángulos necesitamos más de 2 colores, así se reduce a saber si su número cromático es 3 ó 4.

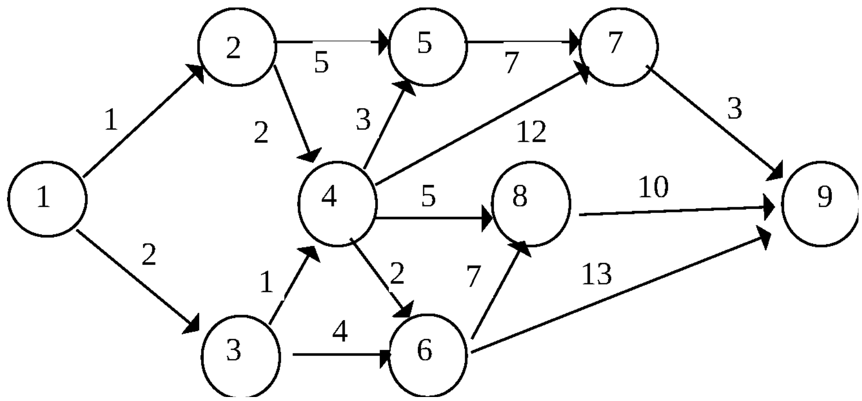
Todo grafo planar que tenga como subgrafo a $\mathbf{K_4}$ necesariamente se debe pintar con 4 colores. En el mapa debería existir un subgrafo como este:



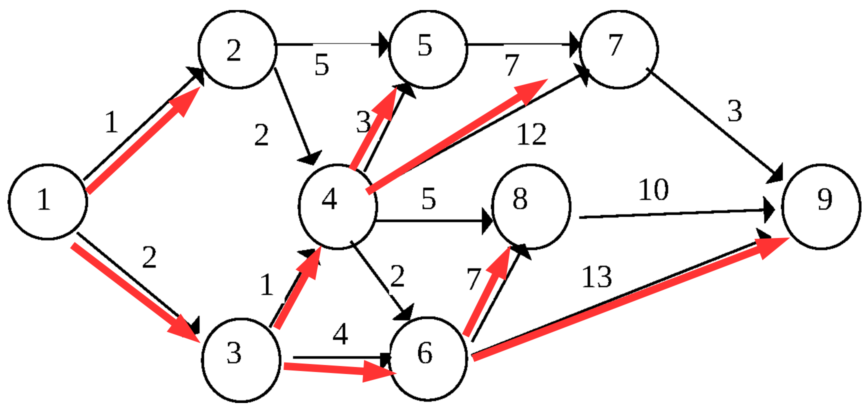
Es obvio que nó, así que podemos asegurar entonces que el número cromático es 3.

(c) Dado que tiene ciclos de longitud *impar*, pues no es bipartito. De hecho basta con que haya vértices formando un triángulo para que no lo sea.

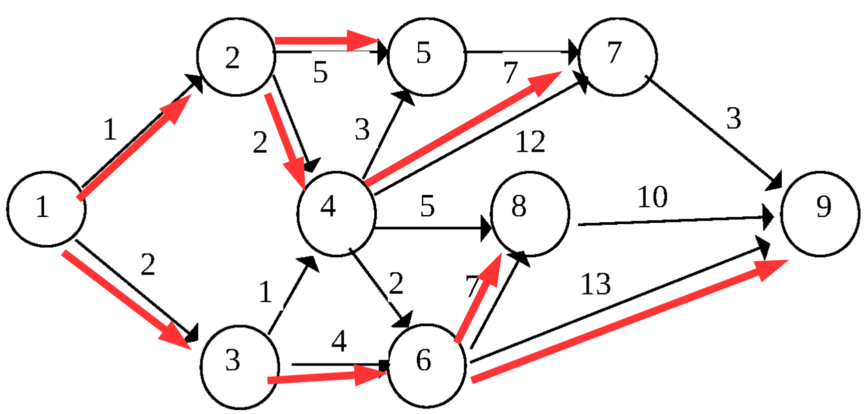
4.- 6 pts. Para el siguiente grafo, determine los árboles de recorrido DFS y BFS, a partir del nodo 1. Asuma que los arcos de los hijos de un vértice se recorren en orden estricto de nodos destino, es decir, el arco 1-2 se escoge antes que 1-3 (en la representación visual y de listas)



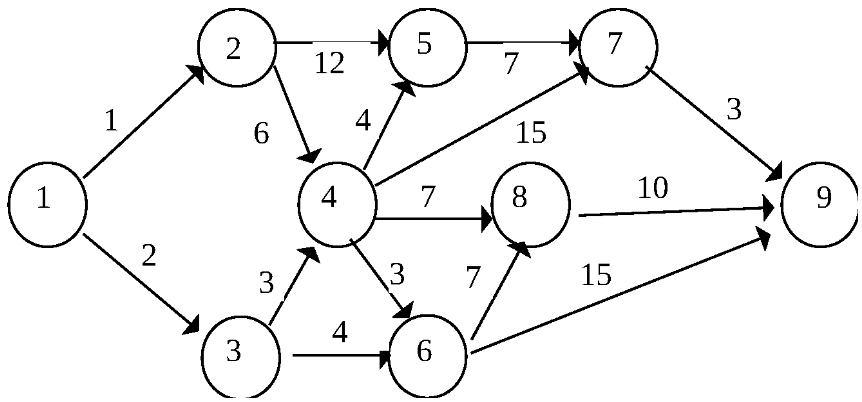
DFS



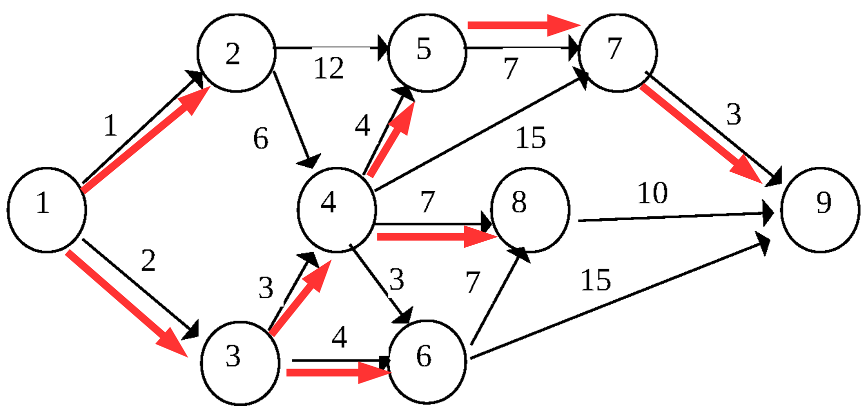
BFS



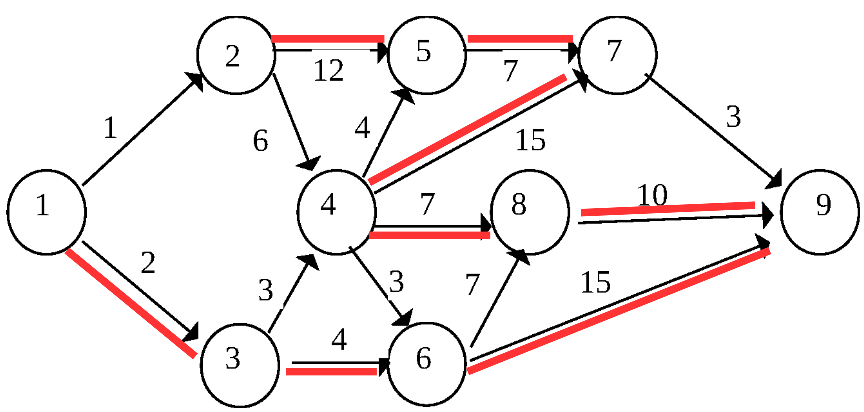
5.- 6 pts. Para el siguiente grafo, **(a)** obtenga el *Árbol de Rutas Mínimas* por el algoritmo más apropiado. **(b)** Si el arco entre 4 y 6 cambia su distancia a 2, aplique el algoritmo general para obtener el nuevo ARM. **(c)** Calcule el Á*rbol MAXIMO Cobertor* usando el algoritmo de KRUSKAL, pero modificado para que escoja el lado con MAYOR costo



a)



b) NO CAMBIA NADA



c) El árbol máximo cobertor